10　数列の極限

基本問題 ＆ 解法のポイント

15

(1)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2+k\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3n^3}+\frac{n(n+1)}{2n^3}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}\right)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}$$

$$=2$$

16

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7+5^{2n}}{9^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{7}{9^n}+\left(\frac{25}{9}\right)^n\right\}=\infty$$

(2)

$|a|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

$a=1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$

$|a|>1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{a^n}}{1+\frac{1}{a^n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$

A

62

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2}{\sum_{k=1}^{n}k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sum_{k=1}^{2n}k^2}{\sum_{k=1}^{n}k^2}-1\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{n(n+1)(2n+1)}-1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(4n+1)}{n+1}-1$$

$$=8-1$$

$$=7$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\left\{(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}\right\}}\cdot\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}\left[\left\{(n+1)^{\frac{1}{3}}\right\}^3-\left(n^{\frac{1}{3}}\right)^3\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}}+1\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right\}$$

$$=1+1+1$$

$$=3$$

(3)

$0<a<1$ のとき

$0<a^n<1$ より，$1<1+a^n<2$　$\therefore 1<\left(1+a^n\right)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}$

よって，$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}=1$ および，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty}\left(1+a^n\right)^{\frac{1}{n}}=1$

$a=1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}\left(1+a^n\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}=1$

$1<a$ のとき

$a^n<1+a^n<2a^n$ より，$\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}<\left(1+a^n\right)^{\frac{1}{n}}<\left(2a^n\right)^{\frac{1}{n}}$　$\therefore a<\left(1+a^n\right)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}a$

よって，$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}a=a$ および，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty}\left(1+a^n\right)^{\frac{1}{n}}=a$

以上より，

$0<a\leq 1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}\left(1+a^n\right)^{\frac{1}{n}}=1$

$1<a$ のとき

$\lim_{n\to\infty}\left(1+a^n\right)^{\frac{1}{n}}=a$

63

$a_n=ar^{n-1}$，$\left(a_n\right)^2=a^2\left(r^2\right)^{n-1}$ より，

$|r|<1\ (r\neq 0)$ または $|r|>1$ のとき，$S_n=\dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$，$T_n=\dfrac{a^2\left(1-r^{2n}\right)}{1-r^2}$　$\therefore \dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{1+r}{a\left(1+r^n\right)}$

$r=-1$ のとき，$S_n=\dfrac{a\left\{1-(-1)^n\right\}}{1-(-1)}=\dfrac{a\left\{1-(-1)^n\right\}}{2}$，$T_n=na^2$　$\therefore \dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{1-(-1)^n}{2na}$

$r=1$ のとき，$S_n=na$，$T_n=na^2$　$\therefore \dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{1}{a}$

よって，

$|r|<1\ (r\neq 0)$ のとき：$\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+r}{a\left(1+r^n\right)}=\dfrac{1+r}{a}$

$r=-1$ のとき：$\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{2na}=0$

$r=1$ のとき： $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\frac{1}{a}$

$|r|>1$ のとき： $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+r}{a\left(1+r^n\right)}=0$

以上より，

$r\leq -1$ または $1<r$ のとき 0

$|r|<1\ (r\neq 0)$ のとき $\dfrac{1+r}{a}$

$r=1$ のとき $\dfrac{1}{a}$

64

$x=0$ のとき

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}f_n(0)=1$$

$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$0<\tan x<1$ より， $\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{0-0+1}{0+0+1}=1$

$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

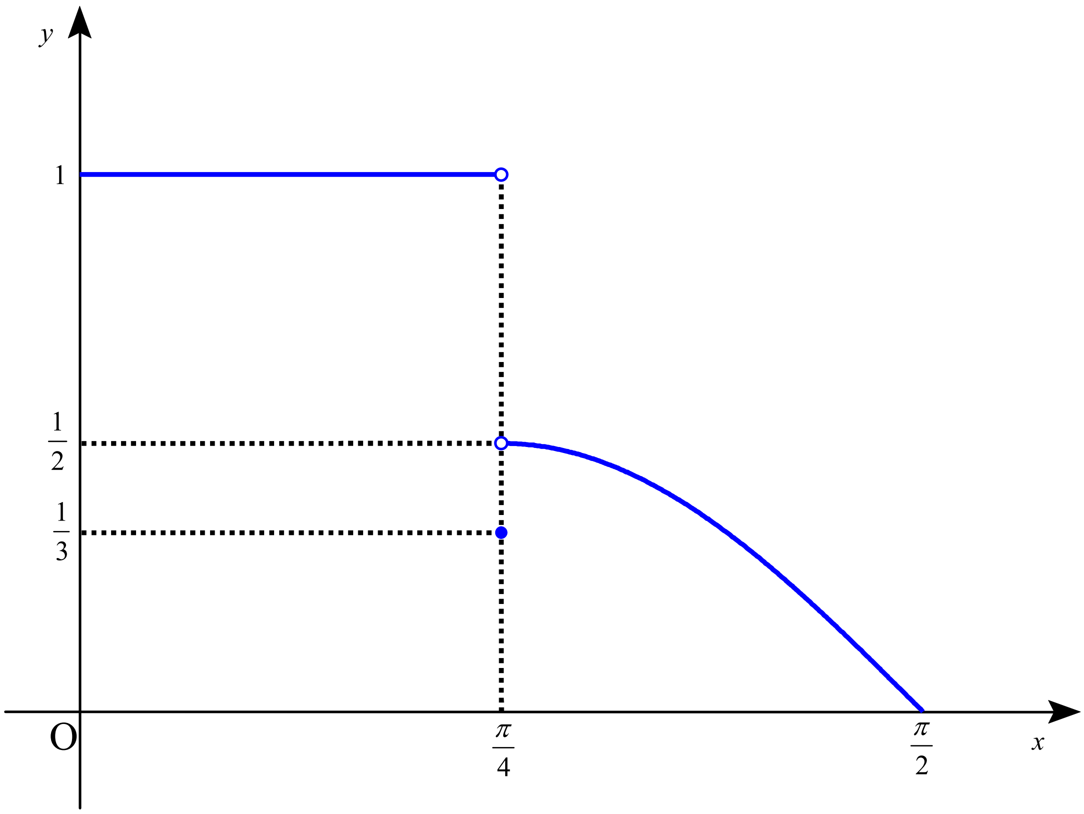
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$$

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\tan x>1$ より，

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan x-\dfrac{1}{\tan^n x}+\dfrac{1}{\tan^{2n}x}}{\tan^2 x+1+\dfrac{1}{\tan^{2n}x}}\\&=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\\&=\tan x\cos^2 x\\&=\sin x\cos x\\&=\frac{1}{2}\sin 2x\end{aligned}$$

以上より，$f(x)=\begin{cases} 1 & \left(0 \leq x < \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \dfrac{1}{3} & \left(x=\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \dfrac{1}{2}\sin 2x & \left(\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$



65

下図より，

軸上の格子点の数

$2m_n+1+n$

軸上以外の格子点の数

曲線 C は y 軸に関して対称だから，

$$2\sum_{k=1}^{m_n}\left|k^2-n\right|=2\sum_{k=1}^{m_n}\left(n-k^2\right)$$

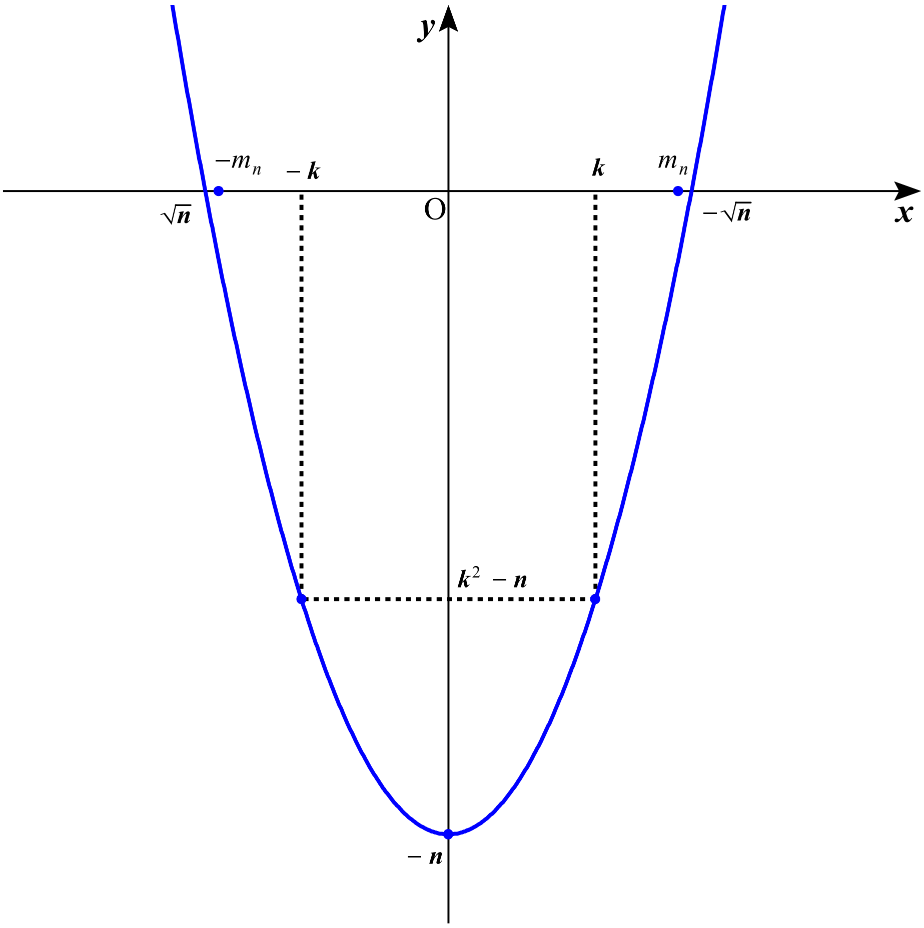
$$=2nm_n-\frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{3}$$

よって，

$$a_n=2m_n+1+n+2nm_n-\frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{3}$$

$$=2m_n+1+n(2m_n+1)-\frac{2m_n+1}{3}\cdot m_n(m_n+1)$$

$$=\frac{1}{3}(2m_n+1)\left(3n+3-m_n{}^2-m_n\right)$$



(2)

解法 **1**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{(2m_n+1)(3n+3-m_n{}^2-m_n)}{\left(n^{\frac{1}{2}}\right)^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2m_n+1}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{3n+3-m_n{}^2-m_n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(2\cdot\frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\left\{3+\frac{3}{n}-\left(\frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^2-\frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

ここで，

$m_n\leq n^{\frac{1}{2}}<m_n+1$ より，$n^{\frac{1}{2}}-1<m_n\leq n^{\frac{1}{2}}$　$\therefore 1-\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}<\dfrac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}\leq 1$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)=1$ だから，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}=1$

ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(2\cdot\frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\left\{3+\frac{3}{n}-\left(\frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^2-\frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(2\cdot1+0)(3+0-1^2-1\cdot0)$$

$$=\frac{4}{3}$$

解法 **2**

$m_n \le n^{\frac{1}{2}} < m_n + 1$ より，$m_n{}^2 \le n < (m_n + 1)^2$

よって，$\frac{1}{3}(2m_n+1)(3m_n{}^2+3-m_n{}^2-m_n) \le a_n < \frac{1}{3}(2m_n+1)\{3(m_n+1)^2+3-m_n{}^2-m_n\}$

すなわち $\frac{1}{3}(2m_n+1)(2m_n{}^2-m_n+3) \le a_n < \frac{1}{3}(2m_n+1)(2m_n{}^2+5m_n+6)$　・・・①

また，$m_n{}^3 \le n^{\frac{3}{2}} < (m_n+1)^3$　すなわち $\frac{1}{(m_n+1)^3} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{m_n{}^3}$　・・・②

①，②より，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{(2m_n+1)(2m_n{}^2-m_n+3)}{(m_n+1)^3} \le \frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{3}\cdot\frac{(2m_n+1)(2m_n{}^2+5m_n+6)}{m_n{}^3}$$

$n \to \infty$ のとき $m_n \to \infty$ だから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(2m_n+1)(2m_n{}^2-m_n+3)}{(m_n+1)^3} &= \frac{1}{3}\lim_{m_n\to\infty}\frac{(2m_n+1)(2m_n{}^2-m_n+3)}{(m_n+1)^3}\\ &= \frac{1}{3}\lim_{m_n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{m_n}\right)\left(2-\frac{1}{m_n}+\frac{3}{m_n{}^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^3}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(2+0)(2-0+0)}{(1+0)^3}\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

同様に，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(2m_n+1)(2m_n{}^2+5m_n+6)}{m_n{}^3} = \frac{4}{3}$

よって，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3}$

66

(1)

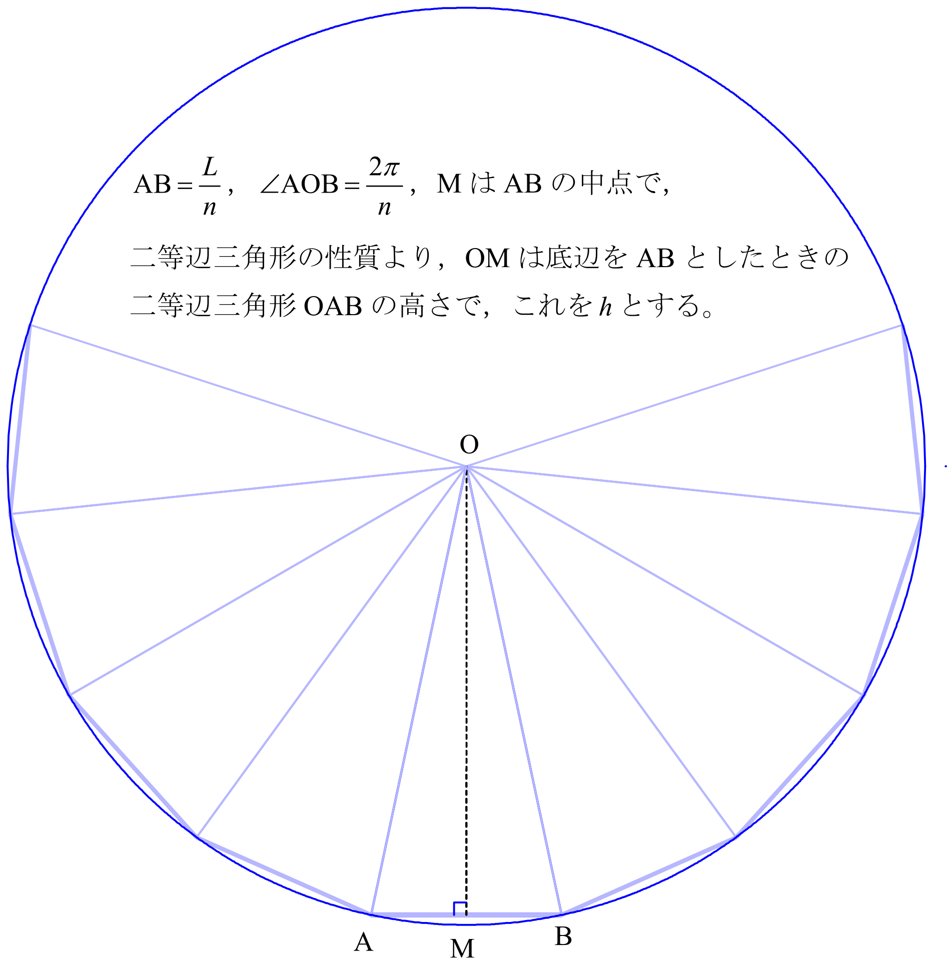
P_n の外接円の中心を O とすると，O と P_n の各頂点を結ぶ線分により，

P_n は，下図のように，頂角が $\dfrac{2\pi}{n}$，底辺の長さが $\dfrac{L}{n}$ の n 個の二等辺三角形に分割できる。

これと二等辺三角形の性質から，その高さを h とすると，$h\tan\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{L}{2n}$ より，$h=\dfrac{L}{2n\tan\dfrac{\pi}{n}}$

よって，

$$
\begin{aligned}
A_n &= n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{n}\cdot h\\
&= \frac{L}{2}\cdot\frac{L}{2n\tan\dfrac{\pi}{n}}\\
&= \frac{L^2}{4n\tan\dfrac{\pi}{n}}
\end{aligned}
$$



(2)

Q_n の周は P_n の周からの距離が r だから，

P_n の頂点を含む部分の Q_n の周は下図のようになっている。

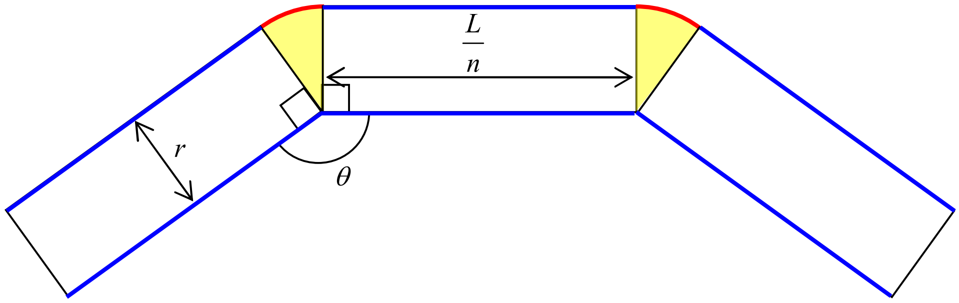
したがって，半径 r の扇形の弧の長さの和＝$n \cdot r\left\{2\pi - \left(\dfrac{\pi}{2} + \theta + \dfrac{\pi}{2}\right)\right\} = n(\pi - \theta) \cdot r$

ここで，$\pi - \theta$ は正 n 角形の 1 外角だから，$n(\pi - \theta) = 2\pi$

よって，半径 r の扇形の弧の長さの和＝$2\pi r$

ゆえに，$L_n = L + 2\pi r$

また，$S_n = A_n + n \cdot \dfrac{L}{n} r + \pi r^2 = A_n + Lr + \pi r^2$



(3)

$$S_n = A_n + Lr + \pi r^2$$
$$= \frac{L^2}{4n\tan\dfrac{\pi}{n}} + Lr + \pi r^2$$
$$= \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\dfrac{\pi}{n}}{\tan\dfrac{\pi}{n}} + Lr + \pi r^2$$

より，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{(L_n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{L^2}{4\pi} \cdot \dfrac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}} + Lr + \pi r^2}{(L + 2\pi r)^2}$$
$$= \frac{\dfrac{1}{4\pi}\left(L^2 + 4\pi Lr + 4\pi^2 r^2\right)}{(L + 2\pi r)^2}$$
$$= \frac{1}{4\pi}$$

67

放物線の方程式を $y = px(x-2a)$ とおくと，これが点 $(a,\ m)$ を通ることから，$m = -pa^2$

よって，$p = -\dfrac{m}{a^2}$

したがって，放物線の方程式は $y = -\dfrac{m}{a^2}x(x-2a)$

これより，

$$S_m = \int_0^{2a} -\frac{m}{a^2}x(x-2a)dx$$
$$= -\frac{m}{a^2}\left[\frac{x^3}{3} - ax^2\right]_0^{2a}$$
$$= \frac{4am}{3} \quad ・・・①$$

また，t を越えない最大の整数を $[t]$ で表すと，

$x = k$ （$k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2a$ ）における格子点の数は $\left[-\dfrac{m}{a^2}k(k-2a)\right]+1$

これより，$L_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{2a}\left\{\left[-\frac{m}{a^2}k(k-2a)\right]+1\right\}$

また，$-\dfrac{m}{a^2}k(k-2a)-1 < \left[-\dfrac{m}{a^2}k(k-2a)\right] \leq -\dfrac{m}{a^2}k(k-2a)$ より，

$$-\frac{m}{a^2}k(k-2a) < \left[-\frac{m}{a^2}k(k-2a)\right]+1 \leq -\frac{m}{a^2}k(k-2a)+1$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}k(k-2a)\right\} < L_m \leq \sum_{k=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}k(k-2a)+1\right\}$

ここで，

$$\sum_{k=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}k(k-2a)\right\} = \sum_{k=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}\left(k^2-2ak\right)\right\}$$
$$= 0 + \left\{-\frac{m}{a^2}\sum_{k=1}^{2a}\left(k^2-2ak\right)\right\}$$
$$= -\frac{m}{a^2}\left\{\frac{2a(2a+1)(4a+1)}{6} - 2a\cdot\frac{2a(2a+1)}{2}\right\}$$
$$= \frac{m\left(4a^2-1\right)}{3a}$$

また，これより，

$$\sum_{k=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}k(k-2a)+1\right\}=\sum_{k=1}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}k(k-2a)\right\}+\sum_{k=0}^{2a}1$$
$$=\frac{m(4a^2-1)}{3a}+2a+1$$

よって，$\dfrac{m(4a^2-1)}{3a}<L_m\leq\dfrac{m(4a^2-1)}{3a}+2a+1$　・・・②

①と②より，

$$\frac{m(4a^2-1)}{3a}\cdot\frac{3}{4am}<\frac{L_m}{S_m}\leq\left\{\frac{m(4a^2-1)}{3a}+2a+1\right\}\frac{3}{4am}$$

すなわち$1-\dfrac{1}{4a^2}<\dfrac{L_m}{S_m}\leq 1-\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{6a+3}{4am}$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{4a^2}+\frac{6a+3}{4am}\right)=1-\frac{1}{4a^2}$ および，はさみうちの原理により，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}=1-\frac{1}{4a^2}$$